Heinrich Heine Universität Düsseldorf

PD Dr. Karin Halupczok
M.Sc. Thor Wittich

Zahlentheorie I (Algebraische Zahlentheorie), WiSe 22/23
Blatt 9

Aufgabe 1 (5 Punkte):
Sei $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{m}) = K$ ein quadratischer Zahlkörper und sei d der Betrag der Diskriminante von K. Für welche d können wir direkt an der Minkowski-Schranke ablesen, dass die Klassenzahl von K durch 1 gegeben ist? Geben Sie die zugehörigen Zahlkörper an.

Aufgabe 2 (5 Punkte):
Wir betrachten den Zahlkörper $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = K$ mit Zahring $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$.

(i) Bestimmen Sie die Minkowski-Schranke. Können Sie nun direkt sagen, dass die Idealklassengruppe von K trivial ist?

(ii) Zeigen Sie, dass die Idealklassengruppe von K dennoch trivial ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte):
In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass die Idealklassengruppe von $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-14})$ zyklisch von Ordnung 4 ist.

(i) Begründen Sie, dass die Idealklassengruppe von den Primteilern der Ideale (2) und (3) erzeugt wird und zeigen Sie, dass $(2) = \mathfrak{p}^2$ und $(3) = \mathfrak{q}\mathfrak{q}'$ für Primideale $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{q}' \subseteq \mathcal{O}_K$ sind.

(ii) Rechnen Sie nach, dass in der Idealklassengruppe $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{-1}$ und $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}^{-1}$ gelten.

(iii) Begründen Sie anhand der Norm, dass $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ keine Hauptideale sein können.

(iv) Nutzen Sie die Norm von $2 + \sqrt{-14}$ um zu zeigen, dass $\mathfrak{p}\mathfrak{q}^2 = 1$ oder $\mathfrak{p}(\mathfrak{q}')^2 = 1$ in $C(K)$ gilt und folgern Sie, dass $C(K)$ zyklisch ist.

(v) Begründen Sie schließlich, dass $\#C(K) = 4$ ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte):
Gehen Sie ähnlich wie in Aufgabe 3 vor, um zu zeigen, dass die Klassengruppe von $\mathbb{Q}(\sqrt{-30})$ ein Produkt zweier zyklischer Gruppen der Ordnungen 2 ist.